Tentamen Algoritmen en Datastructuren

woensdag 27 november 2002, 14 - 17 uur

Het tentamencijfer T is (p/10) + 1, waarbij p het totaal aantal behaalde punten is. Het eindcijfer van het vak is (3T + P)/4, waarbij P het prakticumresultaat is.

NB. Beargumenteer je antwoorden.

1. (40 punt) Deze opgave gaat over zoekbomen (search trees) waarbij in de interne knopen gehele getallen opgeslagen zijn.
   (a) Definieer het begrip *binaire zoekboom.*
   (b) Geef een voorbeeld van een binaire zoekboom met minimale diepte die de getallen 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100 bevat.
   (c) Definieer het begrip *meervoudige zoekboom* (multi-way search tree).
   (d) Geef een voorbeeld van een meervoudige zoekboom met drie knopen die de getallen 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100 bevat.
   (e) Een (2,4)-boom is een meervoudige zoekboom waarin elke knoop hoogstens vier kinderen heeft en waarin alle externe knopen dezelfde diepte hebben. Geef een voorbeeld van een (2,4)-boom met minimaal aantal knopen die de getallen 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100 bevat.
   (f) Bewijs dat de hoogte van een (2,4)-boom met n getallen $\Theta(\log n)$ is. (Aanwijzing: laat zien dat $2^h \leq n + 1 \leq 4^h$.)
   (g) Geef een algoritme voor het toevoegen van een getal aan een (2,4)-boom. De resulteende boom moet uiteraard weer een (2,4)-boom zijn! Analyseer de tijdscomplexiteit (elementaire bewerkingen op getallen en bomen kunnen in $O(1)$ tijd verricht worden).

2. (20 punt) Gegeven zijn n positieve gehele getallen $c_1, \cdots, c_n$ en een positief geheel getal K. Geef een algoritme dat in $O(nK)$ tijd vaststelt of er een deelverzameling S van $\{1, \cdots, n\}$ is met de eigenschap

$$\sum_{i \in S} c_i = K.$$

   (Aanwijzing: gebruik dynamisch programmeren.)

3. (30 punt) Zij gegeven een ongerichte, samenhangende, enkelvoudige (dwz. zonder selfloops en parallelle kanten) gewogen graaf G, waarin alle gewichten verschillend zijn.
   (a) Wat is een opspannende boom (spanning tree) van G? En een minimale opspannende boom?
   (b) Zij V_1, V_2 een partitie van de knopen van G. Beschouw alle kanten van G die een eindpunt in zowel V_1 als V_2 hebben, en laat e van die kanten het laagste gewicht hebben. Laat zien: elke minimale opspannende boom van G bevat e.
   (c) Geef een algoritme dat een minimale opspannende boom van G vindt, met tijdscomplexiteit $O(m \log n)$ (n het aantal knopen, m het aantal kanten). Je mag gebruik maken van een efficiënte priority queue.